Compactification d'Alexandrov

Jean Pierre Mansour

1 Janvier 2022

Proposition et Définition. *Soit* $(E, \mathscr{T})$ *un espace topologique.*
Posons $\overline{E} = E \cup \{\infty\}$, *avec* $\{\infty\}$ *un élément très précis.* O *est un ouvert de* $\overline{E}$ *si et seulement si* O *ouvert de* E *ou* $\infty \in O$ *et* $E \backslash O \subset E$ *est fermé et compact. Alors* $\overline{E}$ *est compact. On dit que* $\overline{E}$ *est le compactifié d'Alexandrov.*

Preuve. Posons
$\overline{\mathscr{T}}=\{O \subset \overline{E}$ / O ouvert de E ou $\infty \in O$ et $E\backslash$O $\subset E$ est fermé et compact$\}$.
Montrons que $(\overline{E}, \overline{\mathscr{T}})$ est un espace topologique.

(O1) $\oslash \in \overline{\mathscr{T}}$ car $\oslash$ est un ouvert de E.

$\overline{E} \in \overline{\mathscr{T}}$. En effet, $E\backslash\overline{E} = \oslash$ est un fermé (Il est dans la topologie de E et son complémentaire) et compact (Axiome Borel-Lebesgue)

(O2) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de $\overline{E}$.

- Si pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert de E, alors la réunion est aussi un ouvert de E. Donc $\bigcup_{i\in I} O_i \in \overline{E}$.
- Sinon, il existe $i_0 \in I$ / O_{i_0} contient ∞ et $E\backslash$O$_{i_0}$ fermé et compact de E. Alors la réunion contient ∞. De plus,

$$E\backslash(\bigcup_{i\in I} O_i) = E\backslash O_{i_0} \cap \bigcap_{i\in I\backslash\{i_0\}} (E\backslash O_i) \tag{1}$$

$\bigcap_{i\in I\backslash\{i_0\}}(E\backslash O_i)$ est une intersection quelconque de fermés de E donc elle est fermée et

$$E\backslash O_{i_0} \cap \bigcap_{i\in I\backslash\{i_0\}} (E\backslash O_i) \subset E\backslash O_{i_0} \tag{2}$$

Mais $E\backslash O_{i_0}$ compact et un fermé dans un compact est compact. D'ou $\bigcup_{i\in I} O_i \in \overline{E}$.

(O3) Même raisonnement pour l'intersection finie.

Finalement, soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de $\overline{E}$ / $\overline{E} = \bigcup_{i\in I} O_i$.
Alors il existe $i_0 \in I$ / O_{i_0} contient ∞ et $E\backslash$O$_{i_0}$ fermé et compact de E recou-

vert par $(O_i)_{i\in I}$. Donc on peut extraire un sous-recouvrement fini de $E\backslash \mathrm{O}_{i_0}$. On ajoute O_{i_0} à ce sous-recouvrement et on obtient que $\overline{E}$ est compact.

(C'est évident dans cas où $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E)